МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Вятский государственный университет»
(ВятГУ)

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ В СООТВЕТСТВИИ С ТЕМОЙ ДИССЕРТАЦИИ
НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА НАУК
ПО НАУЧНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

1.1.5 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА (ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ)

Киров 2023

Программа кандидатского экзамена по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки) разработана Е.М. Вечтомовым, доктором физико-математических наук, профессором, заведующим кафедрой фундаментальной математики ВятГУ.

Рецензент – В.В. Чермных, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»

Программа кандидатского экзамена по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук по научной 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки) утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики ВятГУ, протокол от «28» декабря 2022 г. № 4.

Программа предназначена для лиц, обучающихся по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (далее – аспирантов) и лиц, прикрепленных для сдачи кандидатских экзаменов без освоения программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (далее вместе – соискатели).

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Кандидатский экзамен представляет собой форму оценки степени подготовленности соискателя ученой степени кандидата наук к проведению научных исследований по конкретной научной специальности и отрасли науки, по которой подготавливается или подготовлена диссертация.

Программа кандидатского экзамена по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки) разработана в соответствии с пунктом 3 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842.

Содержание кандидатского экзамена по специальной дисциплине определяется содержанием паспорта научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

2. СОДЕРЖАНИЕ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Раздел 1. Математическая логика и теория алгоритмов

1.1. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

1.2. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.

1.3. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к префиксной нормальной форме.

1.4. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.

1.5. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.

1.6. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.

1.7. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.

1.8. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.

1.9. Понятие алгоритма. Вычислимость по Тьюрингу. Частично рекурсивные функции. Алгорифм Маркова. Тезис Чёрча.

1.10. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.

1.11. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи.

1.12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике.

1.13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.

1.14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.

1.15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

Раздел 2. Алгебра

2.1. Алгебраические системы. Универсальные алгебры. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.

2.2. Теоремы Силова.

2.3. Простота знакопеременных групп A_n, $n \geq 5$, и группы $SO(3, \mathbf{R})$ вращений трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$.

2.4. Строение конечно порожденных абелевых групп.

2.5. Свободные группы и их подгруппы.

2.6. Задание групп образующими и определяющими соотношениями.

2.7. Алгебраические расширения полей. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.

2.8. Строение конечных полей.

2.9. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.

2.10. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.

2.11. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.

2.12. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа – Витта.

2.13. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.

2.14. Решетки. Дедекиндовы решетки. Представление дистрибутивных решеток.

2.15. Теория Стоуна о булевых алгебрах.

Раздел 3. Теория чисел

3.1. Первообразные корни и индексы.

3.2. Квадратичный закон взаимности.

3.3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.

3.4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.

3.5. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

3.6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.

3.7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.

3.8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.

3.9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.

3.10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.

3.11. Трансцендентность чисел e и π.

Раздел 4. Дискретная математика

4.1. Многозначные логики. Проблема полноты. Теорема о полноте систем функции алгебры логики. Алгоритм распознавания полноты систем функций k-значной логики. Теоремы Слупецкого и Яблонского. Особенности k-значных логик.

4.2. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах. Эксперименты с автоматами. Алгоритмическая неразрешимость 4 проблемы полноты для автоматов.

4.3. Элементы комбинаторного анализа. Основные комбинаторные числа. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.

4.4. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина-Куратовского (без доказательства достаточности). Экстремальная теория графов. Теорема Турана. Теорема Рамсея.

4.5. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана. Полные коды. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.

4.6. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга. исправляющие единичную ошибку. Конечные поля и их основные свойства. Коды Боуза-Чоудхури- Хоквингема. Коды Рида-Маллера.

4.7. Понятие управляющей системы. Основные модельные классы управляющих систем: дизъюнктивные нормальные формы, формулы, контактные схемы, схемы из функциональных элементов, автоматы, машины Тьюринга, операторные алгоритмы. Основные проблемы теории управляющих систем.

4.8. Проблема минимизации булевых функций. Постановка задачи в геометрической форме. Тупиковые и минимальные ДНФ. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ СУММА ТУПИКОВЫХ с помощью локального алгоритма. Невозможность построения ДНФ СУММА МИНИМАЛЬНЫХ в классе локальных алгоритмов.

4.9. Синтез и сложность управляющих систем. Асимптотически оптимальный метол Лупанова синтеза схем из функциональных элементов. Асимптотически оптимальный метол Лупанова построения формул. Инвариантные классы Яблонского и их свойства. Синтез схем для функций из инвариантных классов.

4.10. Нижние оценки сложности реализации булевых функций схемами и формулами.

4.11. Потоки в сетях. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм нахождения максимального потока. Теорема о целочисленности. Теорема Кенига-Эгервари. Теорема Холла. Теорема Дилуорса.

4.12. Задачи целочисленного линейного программирования и алгоритмы их решения. Метод Гомори. Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера. Сводимость комбинаторных проблем. Классы сложности P и NP. Приближенные методы решения NP-трудных задач.

3. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Порядок проведения кандидатского экзамена по специальной дисциплине регламентируется требованиями Порядка прикрепления лиц для сдачи кандидатских экзаменов, сдачи кандидатских экзаменов и их перечня, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 28.03.2014 № 247 (с изменениями и дополнениями), а также требованиями локальных актов ВятГУ.

Для приема кандидатских экзаменов создаются комиссии по приему кандидатских экзаменов (далее - экзаменационные комиссии), состав которых утверждается приказом ректора ВятГУ. Состав экзаменационной комиссии формируется из числа научно-педагогических работников ВятГУ (в том числе работающих по совместительству) в количестве не более 5 человек, и включает в себя председателя, заместителя председателя и членов экзаменационной комиссии. В состав экзаменационной комиссии могут также входить научно-педагогические работники других организаций. Экзаменационная комиссия по приему кандидатского экзамена по специальной дисциплине правомочна принимать кандидатский экзамен по специальной дисциплине, если в ее заседании участвуют не менее 3 специалистов, имеющих ученую степень кандидата или доктора наук по научной специальности, соответствующей специальной дисциплине, в том числе 1 доктор наук. Регламент работы экзаменационных комиссий определяется соответствующим локальным актом ВятГУ.

Билеты для сдачи кандидатского экзамена по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки) содержат **два** теоретических вопроса, которые формируются на основе содержания кандидатского экзамена (см. раздел 3 настоящей Программы); примерный перечень вопросов указан далее в разделе 4 настоящей Программы. Билеты оформляются по установленному образцу **(приложение 1)**, утверждаются заведующим кафедрой. До даты проведения кандидатского экзамена допуск к билетам закрыт.

Кандидатский экзамен проводится в **устной** форме. Для подготовки ответа соискателю выдаются бланки ответа с печатью Отдела аспирантуры, докторантуры и НИРС. Время подготовки к ответу - не более **1,0** академического часа (40 минут); на ответ дается не более **0,5** академического часа (20 минут).

Экзаменационная комиссия вправе задать соискателю дополнительные, уточняющие вопросы как по билету кандидатского экзамена, так и по другим вопросам настоящей Программы.

Оценка ответа осуществляется экзаменационными комиссиями в порядке, установленном соответствующим локальным актом ВятГУ с выставлением оценки по шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «не удовлетворительно».

Перечень заданных соискателю вопросов (в том числе дополнительных) и характеристика ответов на них, а также решение экзаменационной комиссии оформляется протоколом и указывается в экзаменационной (зачетной) ведомости, зачетной книжке (при наличии), формы и порядок оформления которых утверждены локальными актами ВятГУ.

4. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КАНДИДАТСКОМУ ЭКЗАМЕНУ

1. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Изд. 3-е. М.: Наука, 1984.
3. Новиков П. С. Элементы математической логики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973.
4. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1987.
5. Гэри М., Джопсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука. 1980.
7. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра, Лань, 2012.
8. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
9. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.. Мир, 1964.
10. Кострикин А. И. Введение в алгебру, Часть 3. Основные структуры алгебры, Физико-математическая литература, 2001.
11. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
12. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
13. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.: Наука. 1983.
14. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
15. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Лань, 2009.
16. Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б. Введение в теорию чисел. М., МГУ. 1995.
17. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. УРСС, 2004.
18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985.
19. Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М., Наука, 1989.
20. Серр Ж. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
21. Белоусов А. И., Ткачев С. Б., Дискретная математика. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015.
22. Вялый М. и др. Лекции по дискретной математике. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2021.
23. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.

Учебно-методическое обеспечение специальной дисциплины, в том числе перечень учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», электронно-библиотечных систем (электронных библиотек), профессиональных баз (в том числе международные реферативные базы данных научных изданий) данных и информационно-справочных систем, необходимое для подготовки к сдаче кандидатского экзамена, в полном объеме содержится в рабочей программе специальной дисциплины «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТИПОВОЙ БЛАНК БИЛЕТА
К КАНДИДАТСКОМУ ЭКЗАМЕНУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Вятский государственный университет»
(ВятГУ)

УТВЕРЖДАЮ:
Заведующий кафедрой фундаментальной математики
_________________Е.М. Вечтомов
«__»_____________2023 г.

Кандидатский экзамен
по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук по научной специальности
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
(физико-математические науки)

Экзаменационный билет № __

1. ____.

2. ____.